

Akurasi Metode Euler Dan Heun Pada Simulasi Numerik Model SIR Dan Efektivitas Intervensi

Nayla Octamandhani¹, Sopi Amelia Salsabila², Naufal Hafizh Wahdiyat²,
Taufik Rahmat Kurniawan⁴

^{1,2,3,4} Program Studi Teknik Informatika, Universitas Muhammadiyah Bandung
e-mail: naylaoctamandhani@gmail.com¹, sopangamelia018@gmail.com²,
wahdiyat51@gmail.com³, taurahkur@umbandung.ac.id⁴

Abstrak

Model Susceptible-Infected-Recovered (SIR) adalah kerangka epidemiologi klasik untuk menggambarkan dinamika penyebaran penyakit menular pada populasi tertutup. Karena sistem persamaan diferensial biasa (PDB) SIR bersifat nonlinear, solusi analitik eksaknya sulit diperoleh sehingga metode numerik menjadi pendekatan yang esensial. Penelitian ini mengimplementasikan Metode Euler dan Metode Heun secara mandiri (from scratch) menggunakan Python untuk menyelesaikan sistem PDB SIR, dengan parameter dasar $\beta = 0,30/\text{hari}$, $\gamma = 0,05/\text{hari}$ ($R_0 = 6,0$) pada populasi $N = 10.000$ individu. Akurasi kedua metode diverifikasi terhadap solusi rujukan `scipy.integrate.odeint` dan dievaluasi melalui analisis sensitivitas ukuran langkah $h \in \{0,25; 0,5; 1; 2; 5; 10\}$ hari. Hasil menunjukkan Metode Heun menghasilkan galat rata-rata absolut (MAE) sekitar 13 kali lebih kecil dibanding Metode Euler pada $h = 1$ hari (11,27 berbanding 147,76), dengan orde konvergensi empiris ≈ 1 untuk Euler dan ≈ 2 untuk Heun, konsisten dengan teori. Simulasi lebih lanjut dengan menurunkan laju transmisi β menunjukkan efek pelandaian kurva epidemi (flattening the curve): attack rate akhir turun dari 99,7% menjadi 31,8% ketika R_0 diturunkan dari 6,0 menjadi 1,2. Temuan ini menegaskan bahwa Metode Heun lebih unggul baik dari sisi akurasi maupun efisiensi komputasi, serta bahwa penurunan laju transmisi merupakan jalur intervensi yang efektif dalam menekan penyebaran epidemi.

Kata Kunci: Model SIR; Metode Euler; Metode Heun; Metode Numerik; Epidemiologi

Abstract

The Susceptible-Infected-Recovered (SIR) model is a classical epidemiological framework describing the dynamics of infectious disease spread within a closed population. Because the SIR system of ordinary differential equations (ODEs) is nonlinear, an exact analytical solution is difficult to obtain, making numerical methods an essential approach. This study independently implements (from scratch) the Euler and Heun methods in Python to solve the SIR system, using baseline parameters $\beta = 0.30/\text{day}$, $\gamma = 0.05/\text{day}$ ($R_0 = 6.0$) for a population of $N = 10,000$ individuals. The accuracy of both methods is verified against a

scipy.integrate.odeint reference solution and evaluated through a sensitivity analysis over step sizes $h \in \{0.25; 0.5; 1; 2; 5; 10\}$ days. Results show that the Heun method produces a mean absolute error (MAE) about 13 times smaller than the Euler method at $h = 1$ day (11.27 versus 147.76), with an empirical convergence order of ≈ 1 for Euler and ≈ 2 for Heun, consistent with theory. Further simulations lowering the transmission rate β demonstrate a flattening-the-curve effect: the final attack rate drops from 99.7% to 31.8% as R_0 is reduced from 6.0 to 1.2. These findings confirm that the Heun method is superior in both accuracy and computational efficiency, and that reducing the transmission rate is an effective intervention pathway for curbing epidemic spread.

Keywords : Sir Model; Euler Method; Heun Method; Numerical Method; Epidemiology

LATAR BELAKANG

Pemodelan matematis penyebaran penyakit menular telah menjadi salah satu instrumen kuantitatif terpenting dalam epidemiologi modern, memberikan dasar ilmiah bagi pengambilan keputusan kesehatan masyarakat seperti kebijakan karantina, pembatasan mobilitas, maupun program vaksinasi. Kerangka model kompartemen yang dipelopori oleh Kermack dan McKendrick (1927) tetap menjadi fondasi sebagian besar model epidemiologi matematis hingga saat ini, termasuk model Susceptible-Infected-Recovered (SIR) yang membagi populasi ke dalam tiga kelompok berdasarkan status penularannya.

Sejak diperkenalkan, model SIR telah dikembangkan ke berbagai arah, mulai dari penambahan kompartemen baru, model stokastik, hingga model berbasis jaringan yang mempertimbangkan struktur kontak sosial secara eksplisit (Hethcote, 2000; Murray, 2002). Meskipun demikian, seluruh varian tersebut tetap bertumpu pada sistem persamaan diferensial biasa (PDB) yang bersifat nonlinear akibat suku interaksi antara populasi rentan dan terinfeksi. Sifat nonlinear ini menyebabkan solusi analitik tertutup hanya dapat diperoleh untuk kasus-kasus khusus yang sangat disederhanakan (Hethcote, 2000), sehingga pendekatan numerik menjadi kebutuhan praktis untuk memperoleh lintasan $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ pada kasus umum.

Terlepas dari keterbatasan asumsinya, model SIR dasar tetap banyak digunakan secara luas karena kesederhanaan strukturnya memudahkan interpretasi hasil dan komunikasi kepada pemangku kebijakan yang tidak selalu memiliki latar belakang matematis mendalam (Hethcote, 2000; Murray, 2002). Selama masa pandemi COVID-19, misalnya, variasi model SIR dan turunannya menjadi salah satu alat bantu yang banyak dirujuk untuk memproyeksikan puncak kasus dan mengevaluasi dampak kebijakan pembatasan sosial di berbagai negara, meskipun akurasi proyeksinya sangat bergantung pada ketepatan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan sistem PDB-nya. Hal ini menegaskan bahwa pemilihan metode numerik bukan sekadar detail teknis implementasi, melainkan faktor yang secara langsung memengaruhi keandalan kesimpulan epidemiologis yang ditarik dari model tersebut.

Berbagai metode numerik telah digunakan untuk menyelesaikan sistem PDB SIR, mulai dari metode satu-langkah sederhana seperti Euler, metode Runge-Kutta orde tinggi,

hingga skema non-standar yang dirancang khusus untuk menjaga sifat positif dan kekekalan populasi (Mehdizadeh Khalsaraei dkk., 2022; Nawaz dkk., 2021), termasuk skema prediktor-korektor orde tinggi untuk model SEIR (Arif dkk., 2024). Ashgi dkk. (2021) membandingkan Metode Euler dengan Runge-Kutta Orde 4 (RK4) dan menemukan bahwa meskipun Euler berjalan lebih cepat, selisih solusinya terhadap RK4 cukup besar; Iskandar dan Tiong (2022) menerapkan RK4 pada kasus COVID-19 di Malaysia dan memverifikasinya dengan Metode Euler; sementara Hossain dkk. (2017) dan Valdez Martinez dkk. (2015) masing-masing menerapkan kombinasi Euler dan skema beda-hingga pada kasus wabah Ebola dan penyebaran worm komputer. Penerapan serupa pada data riil juga dilaporkan oleh Mohd Idris dkk. (2022) yang membandingkan RK4 dan Euler pada kasus COVID-19 di Malaysia, serta Irwan dkk. (2020) yang menerapkan model SIR sederhana pada data COVID-19 di Indonesia untuk mengevaluasi dampak pembatasan sosial berskala besar. Studi-studi tersebut konsisten melaporkan bahwa metode berorde lebih tinggi memberikan akurasi lebih baik, namun sebagian besar berhenti pada perbandingan Euler dengan RK4 (orde empat) tanpa mengeksplorasi Metode Heun (orde dua) sebagai titik tengah yang lebih murah secara komputasi namun tetap jauh lebih akurat dibanding Euler.

Di sisi lain, hubungan eksplisit antara ukuran langkah h dan orde konvergensi empiris pada model SIR belum banyak disajikan secara terintegrasi dalam satu kerangka penelitian yang mandiri (from scratch) dan sekaligus dapat diverifikasi terhadap solusi rujukan berketelitian tinggi. Penelitian mengenai dampak intervensi kesehatan masyarakat terhadap kurva epidemi umumnya juga menggunakan pendekatan kendali optimal yang relatif kompleks secara matematis (Kantner & Koprucki, 2020) dan kurang mudah direplikasi dalam konteks pembelajaran metode numerik tingkat sarjana yang menekankan implementasi mandiri dan interpretasi langsung terhadap parameter model.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini memberikan kontribusi yang bersifat aplikatif dan pedagogis berupa penerapan serta perbandingan sistematis antara Metode Euler dan Metode Heun pada model SIR, yang mencakup: (1) implementasi mandiri kedua metode tanpa bergantung pada pustaka solver instan; (2) verifikasi terhadap solusi rujukan `scipy.integrate.odeint`; (3) analisis konvergensi empiris terhadap variasi ukuran langkah h ; dan (4) evaluasi dampak laju transmisi β terhadap fenomena flattening the curve. Kontribusi ini tidak diklaim sebagai penemuan metode maupun teori baru, melainkan sebagai pengintegrasian aspek akurasi dan efisiensi numerik dalam satu kerangka pengujian yang runtut dan dapat direplikasi.

Secara spesifik, penelitian ini bertujuan untuk: (1) mengimplementasikan dan memverifikasi akurasi Metode Euler dan Metode Heun pada sistem PDB SIR; (2) menganalisis sensitivitas galat kedua metode terhadap variasi ukuran langkah h ; (3) mengevaluasi efisiensi komputasi relatif kedua metode; dan (4) menganalisis pengaruh variasi β terhadap puncak infeksi dan attack rate akhir sebagai dasar kuantitatif untuk memahami efektivitas strategi penurunan transmisi.

METODE

Penelitian ini bersifat komputasional-kuantitatif dengan desain simulasi numerik. Objek penelitian adalah sistem PDB model SIR sebagaimana dirumuskan pada Persamaan (1)-(3).

Seluruh algoritma numerik inti diimplementasikan secara mandiri menggunakan Python, tanpa memanfaatkan pustaka solver instan untuk perhitungan solusi utama. Variabel bebas dalam penelitian ini adalah metode numerik (Euler/Heun), ukuran langkah h , dan laju transmisi β ; variabel terikatnya adalah lintasan $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, puncak infeksi, waktu puncak, attack rate akhir, serta galat (MAE dan RMSE) terhadap solusi rujukan; sedangkan variabel kontrolnya adalah populasi total N , kondisi awal $I(0)$ dan $R(0)$, laju kesembuhan γ , serta rentang waktu simulasi t_0 hingga t_{akhir} , yang dipertahankan tetap kecuali pada skenario yang secara eksplisit memvariasikannya.

Model SIR membagi populasi tertutup berukuran N menjadi tiga kompartemen yang berubah terhadap waktu: $S(t)$ (rentan), $I(t)$ (terinfeksi), dan $R(t)$ (sembuh/kebal), dengan asumsi $S(t) + I(t) + R(t) = N$ konstan. Dinamika ketiga kompartemen tersebut dirumuskan sebagai sistem PDB berikut:

$$dS/dt = -\beta SI/N \quad (1)$$

$$dI/dt = \beta SI/N - \gamma I \quad (2)$$

$$dR/dt = \gamma I \quad (3)$$

dengan β adalah laju transmisi (kontak efektif per individu per satuan waktu) dan γ adalah laju kesembuhan. Bilangan reproduksi dasar $R_0 = \beta/\gamma$ menyatakan rata-rata jumlah individu yang tertular dari satu individu terinfeksi pada populasi yang seluruhnya rentan; $R_0 > 1$ menandakan potensi wabah membesar, sedangkan $R_0 < 1$ menandakan wabah akan mereda (Kermack & McKendrick, 1927; Diekmann dkk., 1990; Van den Driessche & Watmough, 2002).

Karena Persamaan (1)-(3) nonlinear, penyelesaiannya dilakukan secara numerik dengan menuliskan sistem dalam bentuk vektor $y = [S, I, R]$ dan $dy/dt = f(y)$. Metode Euler, sebagai metode satu-langkah paling klasik dalam penyelesaian PDB nilai awal (Chapra & Canale, 2015; Hairer dkk., 1993), mengaproksimasi solusi pada langkah ke- $(n+1)$ menggunakan kemiringan di titik awal langkah:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(y_n) \quad (4)$$

Metode ini hanya membutuhkan satu evaluasi fungsi per langkah, tetapi galat pemotongan lokalnya berorde $O(h^2)$ sehingga galat global berorde $O(h)$ (metode orde satu).

Metode Heun memperbaiki Metode Euler dengan skema prediktor-korektor (Chapra & Canale, 2015): tahap prediktor menghitung estimasi awal menggunakan Metode Euler biasa, kemudian tahap korektor merata-ratakan kemiringan di titik awal dan titik prediksi:

$$y^* = y_n + h \cdot f(y_n) \quad (\text{prediktor}) \quad (5)$$

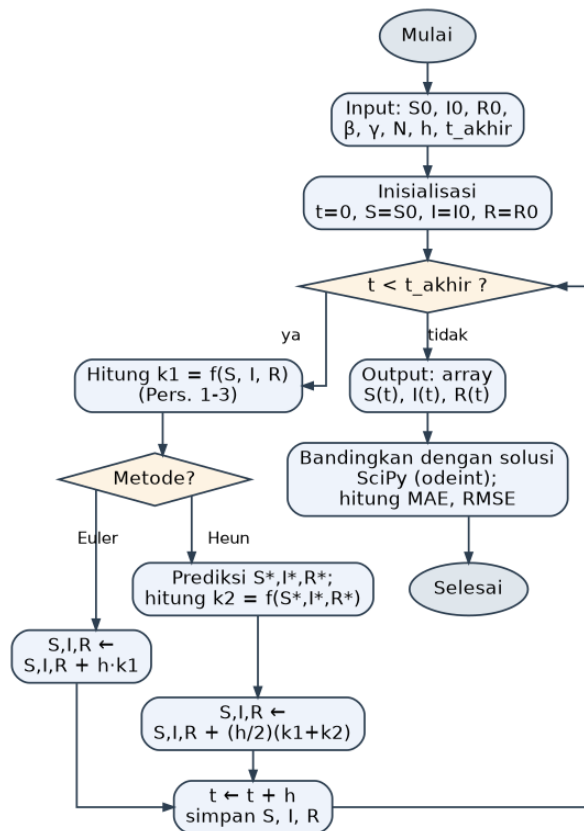
$$y_{n+1} = y_n + (h/2)[f(y_n) + f(y^*)] \quad (6)$$

Dengan dua evaluasi fungsi per langkah, Metode Heun memiliki galat global berorde $O(h^2)$ (metode orde dua), sehingga secara teoritis galatnya berkurang jauh lebih cepat seiring pengecilan h dibandingkan Metode Euler.

Untuk menjawab tujuan penelitian, dirancang dua skenario pengujian. Pertama, sensitivitas galat terhadap ukuran langkah diuji pada $h \in \{0,25; 0,5; 1; 2; 5; 10\}$ hari dengan β

dan γ tetap ($\beta = 0,30$; $\gamma = 0,05$). Kedua, pengaruh laju transmisi diuji pada lima skenario dengan menurunkan β (0,30; 0,20; 0,10; 0,06; 0,04 per hari) sementara γ tetap 0,05 per hari.

Kedua metode diimplementasikan sebagai fungsi Python mandiri (`euler_sir()` dan `heun_sir()`) menggunakan struktur perulangan (`for-loop`) dan variabel array standar, tanpa memanggil pustaka solver instan seperti `scipy.integrate.solve_ivp` atau `odeint` untuk perhitungan solusi utama. Gambar 1 menunjukkan diagram alir umum program simulasi, mencakup tahap input parameter, inisialisasi kondisi awal, perulangan waktu dengan percabangan metode (Euler atau Heun), hingga tahap keluaran dan perbandingan galat. Secara ringkas, langkah algoritmik kedua fungsi tersebut adalah: menetapkan kondisi awal S_0 , I_0 , R_0 , parameter β , γ , N , ukuran langkah h dan rentang waktu $[t_0, t_{\text{akhir}}]$; menghitung jumlah langkah $n = (t_{\text{akhir}} - t_0)/h$ dan menyiapkan array penyimpanan hasil; pada setiap langkah menghitung turunan (dS , dI , dR) melalui fungsi `sir_odes()` pada titik saat ini; untuk Metode Euler, memperbarui S , I , R langsung dengan $S + h \cdot dS$ (dan serupa untuk I , R); untuk Metode Heun, menghitung prediksi Euler terlebih dahulu, mengevaluasi ulang turunan pada titik prediksi, lalu memperbarui S , I , R dengan rata-rata kedua turunan; menyimpan nilai S , I , R , dan t pada array hasil hingga t mencapai t_{akhir} ; dan akhirnya membandingkan lintasan $I(t)$ hasil kedua metode dengan solusi rujukan SciPy untuk menghitung MAE dan RMSE.



Gambar 1. Diagram alir program simulasi SIR (Euler dan Heun).

Simulasi dasar menggunakan parameter $N = 10.000$, $I(0) = 10$, $R(0) = 0$, $S(0) = N - I(0) - R(0)$, $\beta = 0,30/\text{hari}$, $\gamma = 0,05/\text{hari}$ ($R_0 = 6,0$), rentang waktu $t = 0$ hingga 160 hari, dan ukuran langkah dasar $h = 1$ hari. Seluruh simulasi diimplementasikan menggunakan Python 3 pada lingkungan Google Colaboratory, dengan pustaka NumPy (Harris dkk., 2020) untuk komputasi array dan Matplotlib (Hunter, 2007) untuk visualisasi. Sebagai tolok ukur (benchmark) akurasi, solusi rujukan dihitung menggunakan `scipy.integrate.odeint` (Virtanen dkk., 2020) dengan resolusi waktu yang jauh lebih halus; pustaka ini hanya digunakan untuk verifikasi, bukan sebagai solver utama. Galat kedua metode diukur menggunakan Mean Absolute Error (MAE) dan Root Mean Square Error (RMSE) terhadap lintasan $I(t)$ rujukan:

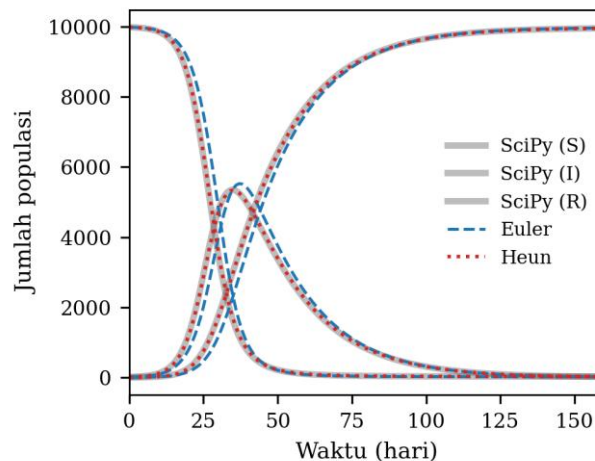
$$\text{MAE} = (1/M) \sum |I_{\text{metode}}(t_i) - I_{\text{rujukan}}(t_i)| \quad (7)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{[(1/M) \sum (I_{\text{metode}}(t_i) - I_{\text{rujukan}}(t_i))^2]} \quad (8)$$

dengan M adalah jumlah titik waktu pembandingan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Gambar 2 menampilkan lintasan $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ hasil Metode Euler dan Metode Heun dibandingkan dengan solusi rujukan SciPy pada $h = 1$ hari. Secara visual, lintasan Metode Heun (garis putus-putus merah) berimpit sangat dekat dengan solusi rujukan (garis abu-abu tebal), sementara lintasan Metode Euler (garis putus-putus biru) tampak menyimpang, khususnya di sekitar puncak kurva $I(t)$ tempat laju perubahan populasi paling tinggi.



Gambar 2. Perbandingan lintasan $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ Metode Euler dan Heun terhadap solusi rujukan SciPy ($h = 1$ hari).

Tabel 1. Statistik Simulasi Dasar ($h = 1$ Hari)

Metode	Puncak I	Hari ke-	S akhir	R akhir
--------	----------	----------	---------	---------

SciPy (rujukan)	5348,7	34,8	25,4	9958,6
Euler	5526,5	37,0	18,0	9966,9
Heun	5340,5	35,0	25,7	9958,1

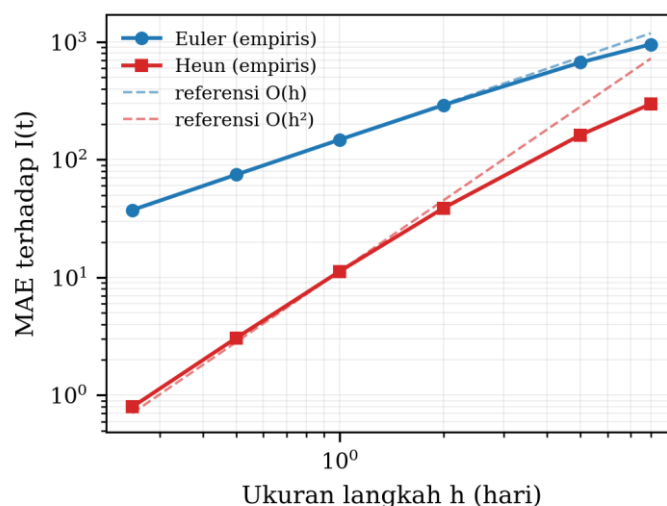
Tabel 1 merangkum statistik puncak dan kondisi akhir simulasi. Metode Heun memberikan estimasi puncak infeksi dan waktu puncak yang jauh lebih dekat dengan rujukan (selisih puncak hanya 8,2 individu dan selisih waktu 0,2 hari) dibandingkan Metode Euler (selisih puncak 177,8 individu dan selisih waktu 2,2 hari), meskipun kedua metode sama-sama menjaga kekekalan populasi total $S + I + R \approx N$ sepanjang simulasi. Selisih waktu puncak Metode Euler yang tertunda (hari ke-37,0 dibandingkan hari ke-34,8 pada rujukan) juga konsisten dengan sifat metode orde satu yang cenderung menaksir-lebih (overestimate) laju perubahan pada bagian kurva yang melengkung tajam, sehingga estimasi puncaknya sedikit bergeser ke kanan.

Tabel 2. Analisis Galat terhadap I(t) Rujukan (h = 1 Hari)

Metode	MAE	RMSE	Galat Puncak (%)
Euler	147,79	275,15	3,32
Heun	11,27	19,56	0,16

Tabel 2 menunjukkan bahwa MAE Metode Heun (11,27) sekitar 13 kali lebih kecil dibanding Metode Euler (147,79) pada ukuran langkah yang sama. Pola serupa juga terlihat pada RMSE dan galat puncak, yang pada Metode Heun kurang dari sepersepuluh nilai Metode Euler. Hal ini sejalan dengan ekspektasi teoritis bahwa metode prediktor-korektor orde dua secara signifikan mengurangi galat pemotongan dibandingkan metode Euler orde satu, dan konsisten dengan temuan Ashgi dkk. (2021) serta Hossain dkk. (2017) yang juga melaporkan selisih akurasi besar antara Euler dan metode berorde lebih tinggi.

Untuk mengonfirmasi orde konvergensi teoritis, kedua metode dijalankan pada variasi ukuran langkah $h \in \{0,25; 0,5; 1; 2; 5; 10\}$ hari. Gambar 3 menyajikan hubungan MAE terhadap h pada skala logaritmik beserta garis referensi kemiringan $O(h)$ dan $O(h^2)$.



Gambar 3. Grafik konvergensi MAE terhadap ukuran langkah h (skala log-log) beserta referensi kemiringan $O(h)$ dan $O(h^2)$.

Tabel 3. Sensitivitas MAE terhadap Ukuran Langkah h

h (hari)	MAE Euler	MAE Heun
0,25	37,35	0,80
0,50	74,44	3,05
1,00	147,79	11,27
2,00	290,18	38,74
5,00	668,01	161,80
10,00	1069,74	360,85

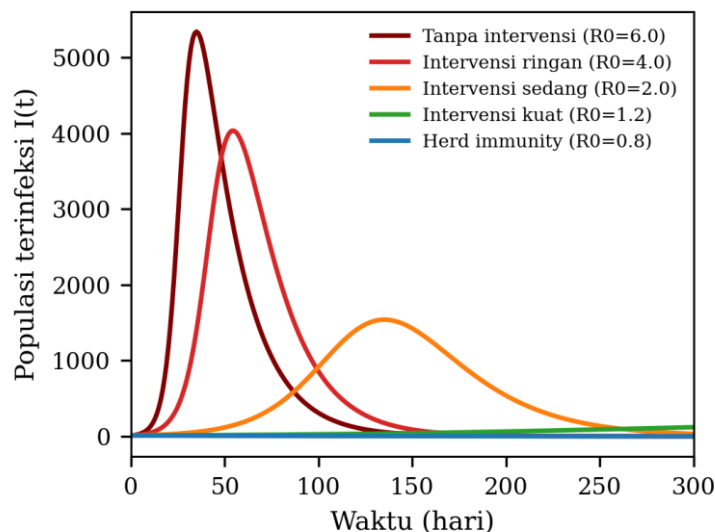
Tabel 3 memperlihatkan bahwa MAE Metode Euler naik hampir proporsional dengan h (orde konvergensi empiris $\approx 0,99$ pada h kecil, melandai menjadi $\approx 0,68$ pada $h = 5-10$ hari akibat efek nonlinearitas), sedangkan MAE Metode Heun naik mendekati proporsional dengan h^2 (orde empiris $\approx 1,94$ pada h kecil, menurun menjadi $\approx 1,16$ pada $h = 5-10$ hari). Estimasi orde ini konsisten dengan sifat teoritis $O(h)$ untuk Euler dan $O(h^2)$ untuk Heun (Chapra & Canale, 2015; Hairer dkk., 1993), dengan penurunan orde pada h besar yang wajar terjadi pada sistem nonlinear seperti SIR.

Secara matematis, kesesuaian ini dapat dijelaskan melalui deret Taylor. Metode Euler memotong deret Taylor solusi setelah suku orde pertama, sehingga galat pemotongan lokalnya sebanding dengan h^2 dan terakumulasi menjadi galat global sebanding dengan h

(Chapra & Canale, 2015; Hairer dkk., 1993). Metode Heun, melalui tahap prediktor-korektornya, secara efektif merata-ratakan dua kemiringan yang saling mengoreksi suku orde kedua dalam ekspansi Taylor tersebut, sehingga galat pemotongan lokalnya sebanding dengan h^3 dan galat globalnya sebanding dengan h^2 . Pelandaian orde empiris pada h besar ($\approx 0,68$ untuk Euler dan $\approx 1,16$ untuk Heun) menunjukkan bahwa pada rezim tersebut suku-suku orde lebih tinggi dalam ekspansi Taylor yang diabaikan pada analisis orde teoritis mulai memberikan kontribusi yang tidak dapat diabaikan, sejalan dengan sifat nonlinear suku $\beta SI/N$ pada model SIR.

Dari sisi efisiensi komputasi, Metode Heun memerlukan dua evaluasi fungsi per langkah dibandingkan satu evaluasi pada Metode Euler. Namun demikian, untuk mencapai MAE setara Metode Heun pada $h = 1$ hari (11,27), Metode Euler diperkirakan membutuhkan ukuran langkah $h \approx 0,076$ hari (≈ 2.099 langkah $\times 1$ evaluasi ≈ 2.099 evaluasi fungsi), sedangkan Metode Heun hanya memerlukan 160 langkah $\times 2$ evaluasi = 320 evaluasi fungsi. Dengan kata lain, Metode Euler membutuhkan sekitar 6,6 kali lebih banyak evaluasi fungsi untuk mencapai akurasi yang setara, sehingga Metode Heun tetap lebih efisien secara komputasi meskipun biaya per langkahnya dua kali lebih mahal.

Untuk mengevaluasi manfaat praktis simulasi numerik dalam konteks kebijakan kesehatan, dilakukan simulasi lima skenario dengan menurunkan laju transmisi β menggunakan Metode Heun. Gambar 4 menunjukkan kurva $I(t)$ untuk setiap skenario, sedangkan Tabel 4 merangkum puncak infeksi, waktu puncak, dan attack rate (persentase populasi yang pernah terinfeksi hingga simulasi konvergen).



Gambar 4. Kurva $I(t)$ pada lima skenario variasi β .

Tabel 4. Skenario Intervensi: Variasi β (Metode Heun, $\gamma = 0,05$)

Skenario	β	R_0	Puncak I	Hari	AR (%)
----------	---------	-------	----------	------	--------

Tanpa intervensi	0,30	6,0	5340,5	35	99,7
Intervensi ringan	0,20	4,0	4033,1	54	98,0
Intervensi sedang	0,10	2,0	1539,2	135	79,7
Intervensi kuat	0,06	1,2	155,7*	406*	31,8
Herd immunity	0,04	0,8	10,0	0	0,5

*Puncak skenario “Intervensi kuat” ($R_0 = 1,2$) terjadi di luar rentang 300 hari yang ditampilkan pada Gambar 4; nilai pada tabel diperoleh dari simulasi yang diperpanjang hingga konvergen ($t = 1.500$ hari).

Tabel 4 menunjukkan hubungan yang jelas antara penurunan R_0 dan penurunan attack rate: dari 99,7% tanpa intervensi ($R_0 = 6,0$) menjadi hanya 31,8% pada skenario intervensi kuat ($R_0 = 1,2$). Skenario dengan R_0 mendekati 1 juga menunjukkan puncak infeksi yang jauh lebih rendah namun terjadi pada waktu yang jauh lebih lambat (hari ke-406 dibandingkan hari ke-35 tanpa intervensi), mengilustrasikan secara kuantitatif fenomena flattening the curve: intervensi tidak hanya menurunkan jumlah kasus puncak, tetapi juga memperlambat laju penyebarannya sehingga memberi waktu lebih bagi sistem kesehatan untuk merespons (Kantner & Koprucki, 2020). Pada skenario herd immunity ($R_0 = 0,8 < 1$), jumlah infeksi langsung menurun sejak awal tanpa membentuk gelombang epidemi yang berarti, sesuai dengan teori ambang epidemi bahwa wabah hanya akan membesar apabila $R_0 > 1$ (Kermack & McKendrick, 1927; Van den Driessche & Watmough, 2002).

Secara keseluruhan, temuan penelitian ini konsisten dengan literatur terdahulu yang membandingkan Metode Euler dengan metode berorde lebih tinggi pada model SIR: sejalan dengan Ashgi dkk. (2021) dan studi RK4 oleh Iskandar dan Tiong (2022), penelitian ini juga menemukan bahwa metode berorde lebih tinggi (dalam hal ini Heun, orde dua) memberikan akurasi signifikan lebih baik dibandingkan Euler pada ukuran langkah yang sama. Berbeda dengan pendekatan Hossain dkk. (2017) dan Valdez Martinez dkk. (2015) yang membandingkan Euler dengan RK4 (orde empat) atau skema beda-hingga khusus, penelitian ini menunjukkan bahwa Metode Heun sebagai metode orde dua yang lebih murah secara komputasi dibanding RK4 sudah cukup memberikan peningkatan akurasi lebih dari satu orde besaran, sekaligus mempertahankan kesederhanaan implementasi yang mendekati Metode Euler. Dibandingkan dengan penerapan pada data riil oleh Mohd Idris dkk. (2022) dan Irwan dkk. (2020), penelitian ini menekankan sisi verifikasi numerik terhadap solusi rujukan berketelitian tinggi (SciPy) daripada pencocokan langsung terhadap data kasus, sehingga kesimpulan mengenai keunggulan Heun bersifat umum dan tidak bergantung pada karakteristik data wabah tertentu. Hasil analisis skenario β memberikan gambaran kuantitatif sederhana mengenai efektivitas intervensi penurunan transmisi terhadap kurva epidemi,

dengan keunggulan berupa transparansi implementasi yang menjadikannya lebih mudah direplikasi dalam konteks pembelajaran metode numerik maupun perencanaan kebijakan kesehatan berskala kecil-menengah. Tabel 5 merangkum posisi penelitian ini relatif terhadap studi-studi numerik SIR terdahulu, ditinjau dari metode yang dibandingkan, skema verifikasi yang digunakan, dan temuan utamanya.

Tabel 5. Perbandingan dengan Penelitian Terdahulu

Studi	Metode	Verifikasi	Temuan Utama
Ashgi dkk. (2021)	Euler vs RK4	Analitik/RK4	Euler cepat, galat besar
Iskandar & Tiong (2022)	RK4 vs Euler	Data COVID-19	RK4 akurat untuk kasus riil
Hossain dkk. (2017)	Euler vs RK4	Solusi analitik	RK4 unggul pada wabah Ebola
Valdez Martinez dkk. (2015)	Euler beda-hingga	Simulasi diskret	Euler cukup untuk worm komputer
Mohd Idris dkk. (2022)	RK4 vs Euler	Data COVID-19 Malaysia	RK4 dan Euler konsisten satu sama lain
Irwan dkk. (2020)	Model SIR sederhana	Data PSBB Indonesia	Infeksi menurun pasca-PSBB
Penelitian ini	Euler vs Heun	SciPy odeint	Heun ~13× lebih akurat, ~6,6× lebih efisien; penurunan β menekan R_0

Secara praktis, hasil di atas dapat menjadi bahan pertimbangan kuantitatif sederhana bagi perencana kesehatan masyarakat: karena $R_0 = \beta/\gamma$, target menekan laju reproduksi wabah di bawah ambang epidemi ($R_0 < 1$) dapat dicapai antara lain dengan menurunkan β melalui pembatasan kontak dan penggunaan masker. Dari sisi metode numerik, hasil analisis konvergensi dan efisiensi menunjukkan bahwa pemilihan Metode Heun dengan $h = 1$ hari sudah memberikan keseimbangan yang baik antara akurasi dan kesederhanaan komputasi untuk kebutuhan simulasi skenario semacam ini, tanpa perlu beralih ke metode berorde lebih tinggi seperti RK4. Bagi kelompok mahasiswa atau instansi dengan sumber daya komputasi terbatas, hasil ini menunjukkan bahwa peningkatan akurasi yang besar dapat diperoleh hanya dengan mengganti skema pembaruan Euler menjadi skema prediktor-korektor sederhana, tanpa perlu investasi tambahan pada perangkat keras maupun pustaka komputasi khusus.

Beberapa keterbatasan perlu dicermati dalam menginterpretasikan hasil penelitian ini. Pertama, model SIR yang digunakan mengasumsikan populasi tertutup (tanpa kelahiran, kematian alami, maupun migrasi) serta parameter β dan γ yang konstan terhadap waktu, sehingga belum merepresentasikan perubahan perilaku populasi atau kebijakan yang bersifat dinamis. Kedua, model bersifat deterministik sehingga tidak menangkap variasi acak (stokastisitas) maupun efek superspreader yang dapat berperan penting pada tahap awal wabah dengan jumlah kasus kecil. Ketiga, parameter epidemiologi ($\beta = 0,30/\text{hari}$ dan $\gamma = 0,05/\text{hari}$) yang digunakan bersifat ilustratif untuk keperluan pengujian metode numerik, bukan hasil kalibrasi terhadap data wabah riil, sehingga angka puncak infeksi maupun attack rate pada penelitian ini sebaiknya dimaknai secara kualitatif-komparatif antar-metode dan antar-skenario, bukan sebagai prediksi kuantitatif untuk populasi tertentu.

Dari sisi komputasi, eksperimen numerik pada penelitian ini hanya menguji ukuran langkah tetap (fixed step size) hingga $h = 10$ hari serta satu kombinasi nilai β dan γ per skenario; kontrol langkah adaptif (adaptive step-size control) dan penelusuran ruang parameter yang lebih luas (mis. grid search atau analisis sensitivitas multivariat) berada di luar cakupan penelitian ini. Selain itu, seluruh perhitungan menggunakan aritmetika titik-mengambang (floating-point) standar Python, sehingga galat pembulatan pada simulasi dengan jumlah langkah sangat besar tidak dianalisis secara terpisah dari galat pemotongan metode numerik itu sendiri. Keterbatasan-keterbatasan ini membuka ruang bagi penelitian lanjutan berupa pengembangan model SEIR, penggunaan Metode Runge-Kutta orde empat (RK4), penerapan laju transmisi β yang berubah terhadap waktu, serta kalibrasi parameter model menggunakan data epidemiologi riil.

SIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengimplementasikan Metode Euler dan Metode Heun secara mandiri (from scratch) untuk menyelesaikan sistem PDB model epidemiologi SIR, serta memverifikasi keduanya terhadap solusi rujukan `scipy.integrate.odeint`. Kedua metode terbukti menjaga kekekalan populasi total ($S + I + R \approx N$), namun Metode Heun secara konsisten memberikan akurasi jauh lebih tinggi pada ukuran langkah yang sama, dengan MAE sekitar 13 kali lebih kecil dibanding Metode Euler pada $h = 1$ hari. Analisis sensitivitas terhadap ukuran langkah h mengonfirmasi orde konvergensi teoritis kedua metode: Metode Euler menunjukkan orde empiris mendekati satu, sedangkan Metode Heun menunjukkan orde empiris mendekati dua. Meskipun Metode Heun membutuhkan dua evaluasi fungsi per langkah, metode ini tetap jauh lebih efisien secara komputasi karena mampu mencapai akurasi setara Metode Euler dengan jumlah evaluasi fungsi sekitar 6,6 kali lebih sedikit. Simulasi skenario intervensi menunjukkan bahwa penurunan laju transmisi β menekan attack rate akhir dan melandaikan sekaligus menunda puncak kurva epidemi. Disarankan agar penelitian lanjutan diarahkan pada pengembangan model SIR menjadi model SEIR, penggunaan Metode Runge-Kutta orde empat (RK4) untuk akurasi lebih tinggi, penerapan laju transmisi β yang berubah terhadap waktu untuk merepresentasikan kebijakan intervensi dinamis, serta kalibrasi parameter model menggunakan data epidemiologi riil, sehingga simulasi numerik berbasis model SIR dapat terus dikembangkan sebagai alat bantu kuantitatif dalam mengevaluasi efektivitas strategi intervensi non-farmasi sebelum diterapkan di lapangan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ashgi, R., Pratama, M.A.A. & Purwani, S. 2021. Comparison Of Numerical Simulation Of Epidemiological Model Between Euler Method With 4th Order Runge Kutta Method. *International Journal Of Global Operations Research*, 2(1): 37-44.
- Arif, M.S., Abodayeh, K. & Nawaz, Y. 2024. A Third-Order Two Stage Numerical Scheme And Neural Network Simulations For SEIR Epidemic Model: A Numerical Study. *Emerging Science Journal*, 8(1): 326-340.
- Chapra, S.C. & Canale, R.P. 2015. *Numerical Methods For Engineers* (7th Ed.). New York: Mcgraw-Hill Education.
- Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P. & Metz, J.A.J. 1990. On The Definition And The Computation Of The Basic Reproduction Ratio R_0 In Models For Infectious Diseases In Heterogeneous Populations. *Journal Of Mathematical Biology*, 28(4): 365-382.
- Hairer, E., Nørsett, S.P. & Wanner, G. 1993. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems* (2nd Ed.). Berlin: Springer-Verlag.
- Harris, C.R., Millman, K.J., Van Der Walt, S.J. Et Al. 2020. Array Programming With Numpy. *Nature*, 585(7825): 357-362.
- Hethcote, H.W. 2000. The Mathematics Of Infectious Diseases. *SIAM Review*, 42(4): 599-653.
- Hossain, M.T., Miah, M.M. & Hossain, M.B. 2017. Numerical Study Of Kermack-Mckendrick SIR Model To Predict The Outbreak Of Ebola Virus Diseases Using Euler And Fourth Order Runge-Kutta Methods. *American Scientific Research Journal For Engineering, Technology, And Sciences*, 37(1): 1-21.
- Hunter, J.D. 2007. Matplotlib: A 2D Graphics Environment. *Computing In Science & Engineering*, 9(3): 90-95.
- Irwan, M., Pathuddin, H., Jalil, E. & Mariani, A. 2020. Model Epidemik SIR Pada Kasus COVID-19 Di Indonesia. *Jurnal MSA (Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya)*, 8(2): 83-87.
- Iskandar, D. & Tiong, O.C. 2022. The Application Of Runge Kutta Fourth Order Method In SIR Model For Simulation Of COVID-19 Cases. *Proceedings Of Science And Mathematics*, 10: 61-70.
- Kantner, M. & Koprucki, T. 2020. Beyond Just “Flattening The Curve”: Optimal Control Of Epidemics With Purely Non-Pharmaceutical Interventions. *Journal Of Mathematics In Industry*, 10: Art. 23.
- Kermack, W.O. & Mckendrick, A.G. 1927. A Contribution To The Mathematical Theory Of Epidemics. *Proceedings Of The Royal Society Of London A*, 115(772): 700-721.
- Mehdizadeh Khalsaraei, I., Shokri, A., Ramos, H., Yao, S.-W. & Molayi, M. 2022. Efficient Numerical Solutions To A SIR Epidemic Model. *Mathematics*, 10(18): Art. 3299.
- Mohd Idris, N.A., Mohtar, S.K., Md Ali, Z. & Abdul Hamid, K. 2022. A Dynamic SIR Model For The Spread Of Novel Coronavirus Disease 2019 (COVID-19) In Malaysia. *Malaysian Journal Of Computing*, 7(2): 1108-1119.
- Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology: I. An Introduction* (3rd Ed.). New York: Springer.
- Nawaz, Y., Arif, M.S., Abodayeh, K. & Shatanawi, W. 2021. An Explicit Unconditionally Stable Scheme: Application To Diffusive COVID-19 Epidemic Model. *Advances In Continuous And Discrete Models*, 2021: Art. 63.

- Valdez Martinez, J.S., Guevara Lopez, P., Audelo Gonzalez, J. & Delgado Reyes, G. 2015. Numerical Approaching Of SIR Epidemic Model For Propagation Of Computer Worms. *IEEE Latin America Transactions*, 13(10): 3452-3460.
- Van Den Driessche, P. & Watmough, J. 2002. Reproduction Numbers And Sub-Threshold Endemic Equilibria For Compartmental Models Of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(1-2): 29-48.
- Virtanen, P. Et Al. 2020. Scipy 1.0: Fundamental Algorithms For Scientific Computing In Python. *Nature Methods*, 17: 261-272.